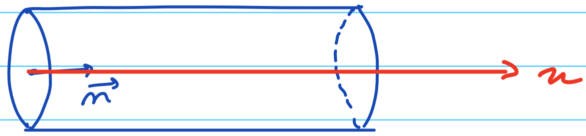
TDM2

SF1



1) $D_m = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} v_0 \, \vec{u_x} \cdot \vec{u_x} \, dr \, r \, d\theta$

$$= \rho \, 2\pi v_0 \int_0^R r \, dr = \rho \, 2\pi v_0 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R = \underline{\rho \, \pi R^2 v_0}$$

2) $D_m = \rho \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{u_x} \cdot \vec{u_x} \, dr \, r \, d\theta$

$$= \rho \, 2\pi v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \rho \, 2\pi v_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right) = \underline{\rho \, \pi v_0 \frac{R^2}{2}}.$$

Gym

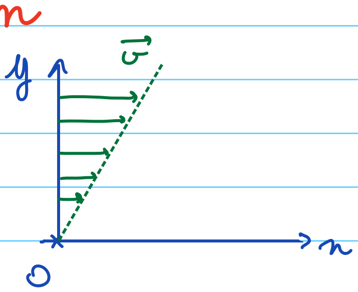
On sait que $D_v = v \times S$ avec v la vitesse débitante
S la section.

Donc $S = \frac{D_v}{v} = \frac{330 \times 3600}{2000} = \underline{594 \, m^2}$

Si on note L la largeur de la Seine et h sa profondeur, on a

$S = L \times h$, donc $h = \frac{594}{165} = \underline{3{,}6 \, m}$

Gym



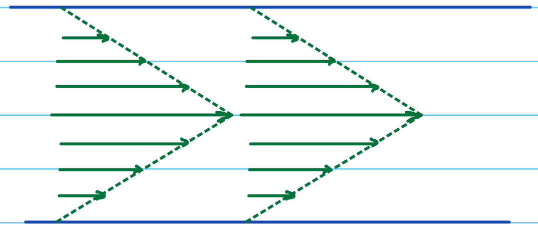
$$d\vec{F} = \eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} \vec{u_x}$$

$$\underline{d\vec{F} = \eta \, k \, \vec{u_x}}$$

Donc $\boxed{\vec{F} = \eta \, k \, S \, \vec{u_x}}$

Exercice 3

1)



2) On a $D_v = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$

$$= \iint v_0 \left(1 - \frac{r}{R_0}\right) \vec{u_z} \cdot dr\, r d\theta\, \vec{u_z}$$

$$= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} v_0 \left(1 - \frac{r}{R_0}\right) dr\, r d\theta$$

$$= 2\pi v_0 \int_0^{R_0} \left(r - \frac{r^2}{R_0}\right) dr$$

$$= 2\pi v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R_0}\right]_0^{R_0} = 2\pi v_0 \left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{3}\right)$$

$$\boxed{D_v = \pi v_0 \frac{R_0^2}{3}}$$

On a alors pour la vitesse débitante $U = \frac{D_v}{\pi R_0^2} = \frac{v_0}{3}$.

3) On a toujours conservation du débit massique :

à un z donné : $D_m = \int_0^{R(z)} \int_0^{2\pi} \mu(z)\, \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^{R(z)} \int_0^{2\pi} \mu(z)\, v_0 \left(1 - \frac{r}{R(z)}\right) dr\, r d\theta$

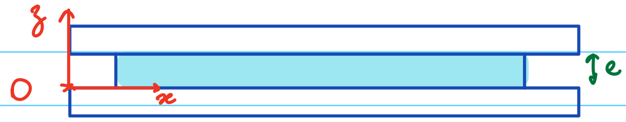
$$D_m = \mu(z)\, \pi v_0 \frac{R(z)^2}{3}$$

or D_m se conserve et vaut donc en particulier $D_m(z=0)$

$$D_m = \mu_0 \cancel{\pi} \cancel{v_0} \frac{\cancel{R_0^2}}{\cancel{3}} = \mu(z) \cancel{\pi} \cancel{v_0} \frac{\cancel{R_0^2} (1 + z^2/e^2)^2}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{\mu(z) = \frac{\mu_0}{(1 + z^2/e^2)^2}}$$

Exercice 4 - Lubrification



1) La vitesse aux points de contact est égale à celle de la plaque donc avec le paramétrage sur le schéma, on a :

$$\vec{v}(z=0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(z=e) = v_0 \vec{u_x}$$

2) On a $v = az + b$ si la vitesse est affine

et $\begin{cases} v(0) = b = 0 \\ v(e) = ae + b = v_0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{v_0}{e}$

Au final $\boxed{v(z) = \frac{v_0}{e} z}$

3) La force exercée par le fluide sur une surface élémentaire de la plaque supérieure est

$$d\vec{F} = \ominus \eta \left| \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=e} \right| dS \, \vec{u_x}$$

car ici la paroi est en mouvement et la force de viscosité veut s'opposer à ce mouvement.

Ainsi $\boxed{\vec{f_s} = -\eta \frac{v_0}{e} \vec{u_x}}$

Exercice 5 - Ecoulement sanguin

1) On a $D_{v,0} = v_0 \times \pi a_0^2$.

Donc $v_0 = \dfrac{D_{v,0}}{\pi a_0^2} = \dfrac{6{,}0.10^{-3}}{60 \times \pi \times (1{,}0.10^{-2})^2} = 0{,}3 . 10^{-3} \times 10^{-1} \times 10^4$
$= \underline{0{,}3 \ m/s}$

2) On a conservation du débit volumique car l'écoulement est stationnaire et incompressible

$$D_{v,0} = N_1 \times D_{v,1}$$

donc $N_1 = \dfrac{D_{v0}}{D_{v1}} = \dfrac{6{,}0 \times 10^{-3}}{60 \times 2{,}0.10^{-6}} = 0{,}5 \ 10^{-3} \times 10^{-1} \times 10^{6}$
$= \underline{50}$

3) Idem $N_2 = \dfrac{D_{v0}}{D_{v2}} = \dfrac{D_{v0}}{v_2 \times \pi a_2^2} = \dfrac{6{,}0.10^{-3}}{60 \times 5.10^{-3} \pi \times (20.10^{-6})^2} = \underline{15.10^6}$

coquille dans l'énoncé

4) Calculons le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{v_2 \ a_2 \ \rho}{\eta} = 25.10^{-3} \ll 1 \rightarrow \text{laminaire}$$

Exercice 6 - Faut-il courir sous la pluie ?

1) En avançant, la personne reçoit de l'eau seulement sur 2 surfaces :
* la surface du haut
* la surface devant

Les vitesses sont constantes et uniformes sur les surfaces où on va calculer les débits donc

$$D_m = \rho v L h + \rho U \ell L$$

En une durée Δt, on reçoit donc $\underline{m = \rho L (v h + U \ell) \Delta t}$

Or $\Delta t = \dfrac{d}{v}$

Donc $m = \rho L (vh + U\ell) \dfrac{d}{v} = \underline{\rho L d \left(h + \dfrac{U}{v} \ell\right)}$

2) Pour minimiser m, il faut maximiser v, donc courir le plus vite possible !

<u>BONUS</u> : et si la pluie est "penchée" par le vent ?

↳ on peut montrer que si le vent est de face, la ccl° est la même

MAIS si le vent est de dos, il faut courir à la m̂ vitesse que la composante horizontale des gouttes

C'est + complexe si le vent est de travers.

Exercice 7 - Déplacement d'un piston à l'huile

1) $G_P = \dfrac{P_2 - P_1}{h} = \dfrac{2P_1 - P_1}{h} = \dfrac{P_1}{h}$.

2) v_d est supposé uniforme dans l'interstice

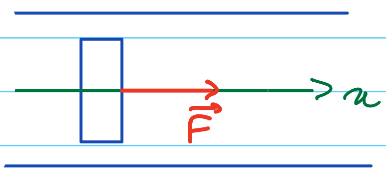
Donc $D_v = v_d \times \pi \left(\dfrac{D_2^2}{4} - \dfrac{D_1^2}{4} \right)$

$$\boxed{D_v = \alpha \frac{P_1}{4 h \eta} \pi (D_2^2 - D_1^2)}$$

3) Considérons une surface élémentaire $dS = \frac{D_1}{2} d\theta\, dx$ du piston

Cette surface élémentaire subit une force $d\vec{F_v}$:

$$d\vec{F_v} = -\eta \left| \frac{\partial v_x}{\partial r} \right| \frac{D_1}{2} d\theta\, dx\, \vec{u_x}$$



L'interstice étant très étroit, on peut approximer

$$\frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{v\left(r = \frac{D_2}{2}\right) - v\left(r = \frac{D_1}{2}\right)}{\frac{D_2}{2} - \frac{D_1}{2}}$$ avec v la vitesse du fluide.

$v\left(r = \frac{D_1}{2}\right) = v_p$ avec v_p la vitesse du piston

$v\left(r = \frac{D_2}{2}\right) = 0$

car l'écoulement est visqueux.

On a donc $d\vec{F_v} = -\eta \dfrac{2 v_p}{D_2 - D_1} \dfrac{D_1}{2} d\theta\, dx\, \vec{u_x}$

En intégrant sur toute la surface latérale du piston :

$$\vec{F_v} = -\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{x=0}^{x=h} \eta \frac{v_p D_1}{D_2 - D_1} d\theta\, dx\, \vec{u_x}$$

$$\boxed{\vec{F_v} = -\eta\, 2\pi \frac{v_p D_1 h}{D_2 - D_1} \vec{u_x}}$$

en ordre de grandeur, on aura $\sigma_p \simeq \sigma_d$ (en réalité, $\sigma_d < \sigma_p$) car σ_d est une moyenne spatiale de $\sigma \in [0, \sigma_p]$ sur la couronne entre D_1 et D_2)

On a alors $$\vec{F}_v = -\eta \, 2\pi \frac{\alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1} \vec{u_x}$$

4) Le mouvement étant quasi statique, on peut considérer que les forces se compensent :

PFD $|\vec{u_x}$ $$0 = \underbrace{P_1 \frac{D_1^2}{4}\pi - P_2 \frac{D_1^2}{2}\pi}_{-P_1 \frac{D_1^2}{4}\pi} - \eta \, 2\pi \frac{\alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1} + F$$

$$\boxed{F = P_1 \frac{D_1^2}{4}\pi + \eta \, 2\pi \frac{\alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1}}$$

On peut approximer la variation de vitesse à une variation linéaire (car l'entrefer est très étroit). On a alors

$$v(r) = ar + b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v\left(\frac{D_1}{2}\right) = v_p \\ v\left(\frac{D_2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$ car l'écoulement est visqueux

On a donc $\begin{cases} a\frac{D_1}{2} + b = v_p \\ a\frac{D_2}{2} + b = 0 \end{cases}$

ie $$a = \frac{2v_p}{D_1 - D_2}$$

$$b = -\frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2}$$

et $$v(r) = \frac{2v_p}{D_1 - D_2} r - \frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2}$$

On a alors $$D_v = \iint \left(\frac{2v_p}{D_1 - D_2} r - \frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2}\right) dr\, r\, d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{2v_p}{D_1 - D_2}\frac{r^3}{3} - \frac{D_2 v_p}{D_1 - D_2}\frac{r^2}{2}\right]_{D_1/2}^{D_2/2}$$

$$= 2\pi \frac{v_p}{D_1 - D_2}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{D_2^3}{8} - \frac{D_1^3}{8}\right) - \frac{D_2}{2}\left(\frac{D_2^2}{4} - \frac{D_1^2}{4}\right)\right)$$

$$= 2\pi \frac{v_p}{D_2 - D_1}\left(+\frac{D_2^3}{3\times 8} + \frac{D_1^2}{8}\left(\frac{2D_1}{3} - D_2\right)\right)$$

$$= 2\pi \frac{v_p}{D_1 - D_2} \times \frac{2}{3\times 8}\left(D_2^3 - D_1^3 - 3D_2^3 - 3D_2 D_1^2\right)$$

$$\left(-2D_2^3 - D_1^3 - 3D_2 D_1^2\right)$$